

一、选择题 BCACD CBBCA BD

二、填空题: 13、80 14. $\frac{1}{2}$ 15、 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 16、②⑤

17. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $c \sin 2B = \sqrt{3}b \sin C$,

由正弦定理可得: $\sin C \cdot 2 \sin B \cos B = \sqrt{3} \cdot \sin B \sin C$,

因为 $B, C \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$, $\sin C \neq 0$

可得 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$,

由 $\cos 2A + 3 \cos A - 2 \sin B = 0$,

可得 $2 \cos^2 A + 3 \cos A - 2 = 0$, 即 $(2 \cos A - 1)(\cos A + 2) = 0$,

解得: $\cos A = \frac{1}{2}$ 或 $\cos A = -2$,

又 $A \in (0, \pi)$, $-1 < \cos A < 1$,

得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $B = \frac{\pi}{6}$, 又 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$,

根据余弦定理得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

可得 $4 = 12 + c^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $c^2 - 6c + 8 = 0$, 解得: $c_1 = 2$, $c_2 = 4$,

当 $c_1 = 2$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$;

当 $c_2 = 4$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$;

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.

18. (I) 设持续 i 天为事件 $A_i, i=1,2,3,4$, 用药持续最多一个周期为事件 B ,

所以 $P(A_1) = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, $P(A_3) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^2$, $P(A_4) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^3$,

$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{65}{81}$.

法二: 设用药持续最多一个周期为事件 B , 则 $\bar{B}$ 为用药超过一个周期,

所以 $P(\bar{B}) = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$, 所以 $P(B) = 1 - (\frac{2}{3})^4 = \frac{65}{81}$.

(II) 随机变量 η 可以取 1, 2

$P(\eta=1) = C_4^3 (\frac{1}{3})^3 \frac{2}{3} + (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{9}$, $P(\eta=2) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$,

$E\eta = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$.

19. (1) 证明: 连接 BD , 因 $BC = BE$

所以 $BD \perp CE$

因为平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCDE = BC$, $AC \perp BC$

所以 $AC \perp$ 平面 $BCDE$

因为 $BD \subset$ 平面 $BCDE$, 所以 $AC \perp BD$

因为 $AC \cap CE = C$, 所以 $BD \perp$ 平面 ACE



因为 $BD \subset$ 平面 ABD , 所以平面 $ABD \perp$ 平面 ACE

(2) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AC = x$, $BC = \sqrt{16 - x^2}$ ($0 < x < 4$),

$$\text{所以, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(16 - x^2)} \leq 4$$

当且仅当 $x^2 = 16 - x^2$, 即 $x = 2\sqrt{2}$ 时, 三角形 ABC 面积有最大值为 4

因为平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCDE = BC$, $BE \perp BC$

$BE \subset$ 平面 $BCDE$, 所以 $BE \perp$ 平面 ABC

$$\text{所以 } V_{A-BCE} = V_{E-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot BE \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

所以, 当 $x = 2\sqrt{2}$ 时, 三棱锥 $A-BCE$ 体积的最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

因为 $BE \parallel CD$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABC .

以 C 为坐标原点, 以 CA , CB , CD 所在

直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.

$$\text{则 } C(0,0,0), A(2\sqrt{2},0,0) D(0,0,2\sqrt{3}), E(0,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = (-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{DE} = (0, 2\sqrt{2}, 0),$$

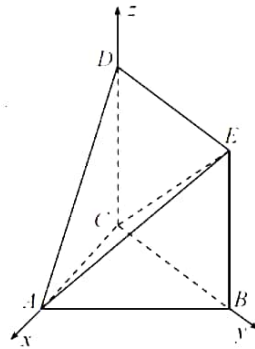
$$\text{平面 } ABC \text{ 的法向量 } \overrightarrow{n_1} = (0, 0, 2\sqrt{3}),$$

$$\text{设平面 } ADE \text{ 的法向量 } \overrightarrow{n_2} = (x, y, z), \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}z = 0 \\ 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x = \sqrt{3}, \text{ 则 } y = 0, z = \sqrt{2}, \text{ 即 } \overrightarrow{n_2} = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

故平面 ADE 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



20、解 (1) 将 P 的坐标代入方程可得: $a=2$, 所以由椭圆的定义可知, 曲线 C 的轨迹为以 $(-1, 0)$,

$(1, 0)$ 为焦点, 以长半轴为 2 的椭圆,

$$\text{所以曲线 } C \text{ 的标准方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(II) (i) 设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, BD 的中点坐标 $M(x_0, y_0)$,

由题意可得直线 BD 的斜率存在且不为 0, 所以设直线 BD 的方程为: $x = my + 1$,

则直线 AF 的方程为: $y = -m(x - 1)$, A 在直线 $x = 4$ 上, 所以 $y_A = -3m$, 即 $A(4, -3m)$,

$$\text{将直线 } BD \text{ 与椭圆联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 整理可得 } (4 + 3m^2)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{6m}{4 + 3m^2}, y_1 y_2 = -\frac{9}{4 + 3m^2},$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{8}{4 + 3m^2},$$

$$\text{所以中点 } M\left(\frac{4}{4 + 3m^2}, \frac{-3m}{4 + 3m^2}\right),$$

$$\text{因为 } k_{OA} = \frac{-3m}{4} = k_{OM},$$



所以 OA 平分线段 BD ;

$$(ii) |AF|=3\sqrt{1+m^2}, |BD|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(1+m^2)}{4+3m^2},$$

$$\text{所以 } \frac{|BD|}{|AF|}=\frac{4\sqrt{1+m^2}}{4+3m^2}, \text{ 令 } t=\sqrt{1+m^2}\geq 1,$$

$$\text{所以 } \frac{|BD|}{|AF|}=\frac{4t}{3t^2+1}=\frac{4}{3t+\frac{1}{t}}\leq 1, \text{ 当且仅当 } t=1 \text{ 时取等号},$$

$$\text{所以 } \frac{|BD|}{|AF|} \text{ 最大值为 } 1.$$

21 解: (I) 当 $a=0$ 时, $f(x)=2\sin x-x^2+2\pi x$, 定义域为 $x\in\mathbb{R}$,

$$\text{则 } f'(x)=2\cos x-2x+2\pi, f''(x)=-2\sin x-2<0,$$

$$\therefore y=f'(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上为减函数},$$

$$\therefore f'(0)=2+2\pi>0, f'(\pi)=-2\pi<0,$$

$$\therefore \text{由零点存在性定理可知, } f'(x) \text{ 在 } x\in(0, \pi) \text{ 上必存在 } x_0, \text{ 使得 } f'(x_0)=0,$$

$$\text{且当 } x\in(-\infty, x_0) \text{ 时, } f'(x)>0, \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } x\in(-\infty, x_0) \text{ 上单调递增},$$

$$\text{当 } x\in(x_0, +\infty) \text{ 时, } f'(x)<0, \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } x\in(x_0, +\infty) \text{ 上单调递减},$$

$$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0),$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 至多有两个零点},$$

$$\text{又 } \because f(0)=0, f(2\pi)=0,$$

$$\text{故 } x=0, x=2\pi \text{ 是 } f(x) \text{ 的两个零点},$$

$$\therefore \text{由 } f'(0)=2+2\pi, f'(2\pi)=2-2\pi, \text{ 易得两切线方程为 } y=(2+2\pi)x \text{ 或 } y=(2-2\pi)x-4\pi+4\pi^2;$$

$$(II) \text{ 证明: 由 (I) 易知, } x_1<x_0<x_2,$$

$$\text{设 } F(x)=(2+2\pi)x-2\sin x+x^2-2\pi x, F'(x)=2-2\cos x+2x, F''(x)=2\sin x+2\geq 0,$$

$$\therefore y=F'(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上为增函数},$$

$$\therefore F'(0)=0,$$

$$\therefore \text{当 } x\in(-\infty, 0) \text{ 时, } F'(x)<0, \text{ 即 } F(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上为减函数},$$

$$\text{当 } x\in(0, +\infty) \text{ 时, } F'(x)>0, \text{ 即 } F(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上为增函数},$$

$$\therefore F(x)\geq F(0)=0, \text{ 即 } (2+2\pi)x\geq 2\sin x-x^2+2\pi x,$$

$$\text{设 } y=(2+2\pi)x \text{ 与 } y=a \text{ 的交点横坐标为 } x_3, \text{ 则 } (2+2\pi)x_1\geq 2\sin x_1-x_1^2+2\pi x_1=a=(2+2\pi)x_3,$$

$$\therefore y=(2+2\pi)x \text{ 为增函数},$$

$$\therefore x_3=\frac{a}{(2+2\pi)}\leq x_1;$$

$$\text{同理设 } G(x)=(2-2\pi)(x-2\pi)-2\sin x+x^2-2\pi x, \text{ 则 } G'(x)=2-4\pi-2\cos x+2x, G''(x)=2\sin x+2\geq 0,$$

$$\therefore y=G'(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上为增函数},$$

$$\text{又 } G'(2\pi)=0,$$

$$\therefore \text{当 } x\in(-\infty, 2\pi) \text{ 时, } G'(x)<0, \text{ 即 } G(x) \text{ 在 } (-\infty, 2\pi) \text{ 上单调递减},$$

$$\text{当 } x\in(2\pi, +\infty) \text{ 时, } G'(x)>0, \text{ 即 } G(x) \text{ 在 } (2\pi, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore G(x)\geq G(2\pi)=0, \text{ 即 } (2-2\pi)(x-2\pi)\geq 2\sin x-x^2+2\pi x,$$

$$\text{设 } y=(2-2\pi)(x-2\pi) \text{ 与 } y=a \text{ 的交点横坐标为 } x_4, \text{ 则 } (2-2\pi)(x_2-2\pi)\geq 2\sin x_2-x_2^2+2\pi x_2=a=(2-2\pi)(x_4-2\pi),$$

$$\text{又 } y=(2-2\pi)(x-2\pi) \text{ 为减函数, 则 } x_4=\frac{a}{2-2\pi}+2\pi\geq x_2,$$

$$\text{故 } x_2-x_1\leq x_4-x_3=\frac{4\pi a}{(2-2\pi)(2+2\pi)}+2\pi=\frac{a\pi}{1-\pi^2}+2\pi,$$

$$\therefore \frac{1-\pi^2}{\pi}(x_2-x_1-2\pi)\geq a, \text{ 得证}.$$

$$22. (1) l_1 \text{ 的方程为 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ 化为极坐标方程为 } \theta=\frac{\pi}{6} (\rho\in\mathbb{R}).$$

$$\text{代入 } l_2 \text{ 的方程得: } \rho=3, \text{ 即 } B\left(3, \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{方程 } 2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+3=c, \text{ 令 } \theta=0, \text{ 即 } \rho=\sqrt{3}, \text{ 即 } A(\sqrt{3}, 0).$$



(2) 由 (1) 知, $|OA| = \sqrt{3}$, $|OB| = 3$, 且 $\angle BOA = \frac{\pi}{6}$,

故 $|AB| = \sqrt{3}$, 设点 P 到直线 AB 的距离为 d ,

故 $S = \frac{\sqrt{3}}{2}d$, 设点 $P(\cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta)$, l_2 的一般方程为 $y = \sqrt{3}x - 3$,

故 $S = \frac{\sqrt{3}}{2}d = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{|\sqrt{3} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta - 3|}{2} = \frac{3}{4} \left| \sqrt{3} + \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right|$,

当 $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{4}$ 此时, P 点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$.

23. 解: (1) 由题知不等式 $f(x) - f(2x+4) < 2$,

即 $|x-2| - |2x+2| < 2$, 等价于 $\begin{cases} x < -1 \\ -x+2+2x+2 < 2 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -x+2-2x-2 < 2 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x > 2 \\ x-2-2x-2 < 2 \end{cases}$;

解得 $x < -2$ 或 $-\frac{2}{3} < x \leq 2$ 或 $x > 2$, 即 $x < -2$ 或 $x > -\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$;

(2) 由题知 $f(x-1) + f(x+3) = |x-3| + |x+1| \geq |(x-3) - (x+1)| = 4$,

$\therefore f(x-1) + f(x+3)$ 的最小值为 4, $\therefore m^2 + 3m \leq 4$, 解得 $-4 \leq m \leq 1$, $\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $[-4, 1]$.

